Análisis Complejo: 2.3 Familias normales. Teorema de Riemann

Presentaciones de clase

Universidad de Murcia

Curso 2011-2012

1 Familias normales

Objetivos

Objetivos

1. Estudiar la topología τ_K de convergencia uniforme sobre compactos en $C(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{C}$: metrizabilidad, completitud, caracterización de subconjuntos compactos (Ascoli).

Objetivos

Objetivos

1. Estudiar la topología τ_K de convergencia uniforme sobre compactos en $C(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{C}$: metrizabilidad, completitud, caracterización de subconjuntos compactos (Ascoli).
2. Utilizar las nociones anteriores en $\mathscr{H}(\Omega)$: recordar el teorema de Weierstrass; demostrar los teoremas de Montel y de Vitali.

Objetivos

Objetivos

1. Estudiar la topología τ_K de convergencia uniforme sobre compactos en $C(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{C}$: metrizabilidad, completitud, caracterización de subconjuntos compactos (Ascoli).
2. Utilizar las nociones anteriores en $\mathscr{H}(\Omega)$: recordar el teorema de Weierstrass; demostrar los teoremas de Montel y de Vitali.
3. Enunciar y demostrar el teorema de representación conforme de Riemann.

Objetivos

Objetivos

1. Estudiar la topología τ_K de convergencia uniforme sobre compactos en $C(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{C}$: metrizabilidad, completitud, caracterización de subconjuntos compactos (Ascoli).
2. Utilizar las nociones anteriores en $\mathscr{H}(\Omega)$: recordar el teorema de Weierstrass; demostrar los teoremas de Montel y de Vitali.
3. Enunciar y demostrar el teorema de representación conforme de Riemann.
4. Establecer distintas caracterizaciones de los abiertos simplemente conexos de $\mathbb{C}$.

Objetivos

Objetivos

1. Estudiar la topología τ_K de convergencia uniforme sobre compactos en $C(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{C}$: metrizabilidad, completitud, caracterización de subconjuntos compactos (Ascoli).
2. Utilizar las nociones anteriores en $\mathscr{H}(\Omega)$: recordar el teorema de Weierstrass; demostrar los teoremas de Montel y de Vitali.
3. Enunciar y demostrar el teorema de representación conforme de Riemann.
4. Establecer distintas caracterizaciones de los abiertos simplemente conexos de $\mathbb{C}$.
5. Estudiar integrales dependientes de un parámetro: fórmulas integrales para las funciones Γ y ζ.

Topología de convergencia uniforme sobre compactos: τ_K

Ω es un abierto del plano complejo y (E, d) un espacio métrico.

1. E^Ω es el conjunto de las funciones $f : \Omega \to E$ y $C(\Omega, E)$ es el subconjunto formado por las funciones continuas.

Topología de convergencia uniforme sobre compactos: τ_K

Ω es un abierto del plano complejo y (E, d) un espacio métrico.

1. E^Ω es el conjunto de las funciones $f : \Omega \to E$ y $C(\Omega, E)$ es el subconjunto formado por las funciones continuas.
2. τ_K es la topología en E^Ω para la que las sucesiones convergentes son las que convergen uniformemente sobre compactos de Ω.

Topología de convergencia uniforme sobre compactos: τ_K

Ω es un abierto del plano complejo y (E,d) un espacio métrico.

1. E^Ω es el conjunto de las funciones $f:\Omega\to E$ y $C(\Omega,E)$ es el subconjunto formado por las funciones continuas.
2. τ_K es la topología en E^Ω para la que las sucesiones convergentes son las que convergen uniformemente sobre compactos de Ω.
3. Base entornos para τ_K en $f\in E^\Omega$:

$$\mathscr{B}_f=\{V(f,K,\varepsilon):K\subset\Omega \text{ compacto},\ \varepsilon>0\}$$

$$V(f,K,\varepsilon)=\{g\in E^\Omega:d_K(f,g)<\varepsilon\};\ \ d_K(f,g)=\sup\{d(f(z),g(z)):z\in K\}$$

Topología de convergencia uniforme sobre compactos: τ_K

Ω es un abierto del plano complejo y (E,d) un espacio métrico.

1. E^Ω es el conjunto de las funciones $f:\Omega\to E$ y $C(\Omega,E)$ es el subconjunto formado por las funciones continuas.
2. τ_K es la topología en E^Ω para la que las sucesiones convergentes son las que convergen uniformemente sobre compactos de Ω.
3. Base entornos para τ_K en $f\in E^\Omega$:

$$\mathscr{B}_f=\{V(f,K,\varepsilon\}:K\subset\Omega \text{ compacto},\ \varepsilon>0\}$$

$$V(f,K,\varepsilon)=\{g\in E^\Omega:d_K(f,g)<\varepsilon\};\ \ d_K(f,g)=\sup\{d(f(z),g(z)):z\in K\}$$

4. Un conjunto de funciones $G\subset E^\Omega$ es abierto para la topología τ_K cuando para cada $f\in G$ existe $V\in\mathscr{B}_f$ tal que $V\subset G$.

Topología de convergencia uniforme sobre compactos: τ_K

Ω es un abierto del plano complejo y (E,d) un espacio métrico.

1. E^Ω es el conjunto de las funciones $f:\Omega\to E$ y $C(\Omega,E)$ es el subconjunto formado por las funciones continuas.
2. τ_K es la topología en E^Ω para la que las sucesiones convergentes son las que convergen uniformemente sobre compactos de Ω.
3. Base entornos para τ_K en $f\in E^\Omega$:

$$\mathscr{B}_f=\{V(f,K,\varepsilon\}:K\subset\Omega \text{ compacto},\ \varepsilon>0\}$$

$$V(f,K,\varepsilon)=\{g\in E^\Omega:d_K(f,g)<\varepsilon\};\ \ d_K(f,g)=\sup\{d(f(z),g(z)):z\in K\}$$

4. Un conjunto de funciones $G\subset E^\Omega$ es abierto para la topología τ_K cuando para cada $f\in G$ existe $V\in\mathscr{B}_f$ tal que $V\subset G$.
5. Es fácil comprobar que de esta forma queda definida en E^Ω una topología separada para la cual $\mathscr{B}_f$ es una base de entornos de f, para cada $f\in E^\Omega$.

Topología de convergencia uniforme sobre compactos: τ_K

Ω es un abierto del plano complejo y (E,d) un espacio métrico.

1. E^Ω es el conjunto de las funciones $f:\Omega\to E$ y $C(\Omega,E)$ es el subconjunto formado por las funciones continuas.
2. τ_K es la topología en E^Ω para la que las sucesiones convergentes son las que convergen uniformemente sobre compactos de Ω.
3. Base entornos para τ_K en $f\in E^\Omega$:

$$\mathscr{B}_f=\{V(f,K,\varepsilon\}:K\subset\Omega \text{ compacto},\ \varepsilon>0\}$$

$$V(f,K,\varepsilon)=\{g\in E^\Omega:d_K(f,g)<\varepsilon\};\ \ d_K(f,g)=\sup\{d(f(z),g(z)):z\in K\}$$

4. Un conjunto de funciones $G\subset E^\Omega$ es abierto para la topología τ_K cuando para cada $f\in G$ existe $V\in\mathscr{B}_f$ tal que $V\subset G$.
5. Es fácil comprobar que de esta forma queda definida en E^Ω una topología separada para la cual $\mathscr{B}_f$ es una base de entornos de f, para cada $f\in E^\Omega$.
6. Las sucesiones $f_n\in E^\Omega$ que son convergentes para τ_K son precisamente las que convergen uniformemente sobre compactos.

Metrizabilidad τ_K

Para cada abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ existe una sucesión fundamental de compactos, es decir, una sucesión de compactos $K_n \subset \Omega$, que verifica

$$\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n, \quad \text{y} \quad K_n \subset \overset{o}{K}_{n+1} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Metrizabilidad τ_K

Para cada abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ existe una sucesión fundamental de compactos, es decir, una sucesión de compactos $K_n \subset \Omega$, que verifica

$$\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n, \quad \text{y} \quad K_n \subset \overset{o}{K}_{n+1} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Cada compacto $K \subset \Omega$ está contenido en algún K_m.

Metrizabilidad τ_K

Para cada abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ existe una sucesión fundamental de compactos, es decir, una sucesión de compactos $K_n \subset \Omega$, que verifica

$$\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n, \quad \text{y} \quad K_n \subset \overset{o}{K}_{n+1} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Cada compacto $K \subset \Omega$ está contenido en algún K_m.

Teorema

Sea (K_n) una sucesión fundamental de compactos en el abierto Ω. Para $f, g \in E^\Omega$ se define

$$\rho(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \rho_n(f,g), \quad \text{con} \quad \rho_n(f,g) = \min\{1, d_{K_n}(f.,g)\}.$$

Entonces ρ es una distancia en E^Ω cuya topología asociada es τ_K.

Completitud τ_K

Proposición

En las condiciones del teorema anterior si el espacio métrico (E, d) es completo, el espacio métrico (E^Ω, ρ) también lo es.

Completitud τ_K

Proposición

En las condiciones del teorema anterior si el espacio métrico (E, d) es completo, el espacio métrico (E^Ω, ρ) también lo es.

Corolario

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y (E, d) un espacio métrico. Entonces, $C(\Omega, E)$ es un subconjunto cerrado de (E^Ω, τ_K). Si (E, d) es completo el espacio métrico $(C(\Omega, E), \rho)$ también es completo.

Familias equicontinuas

Definición

Una familia $\mathscr{F} \subset C(\Omega, E)$ se dice que es equicontinua en $a \in \Omega$ cuando para cada $\varepsilon > 0$ existe $D(a,r) \subset \Omega$ tal que

$$[z \in D(a,r), f \in \mathscr{F}] \Rightarrow d(f(z), f(a)) < \varepsilon$$

Se dice que $\mathscr{F}$ es equicontinua cuando es equicontinua en cada punto $a \in \Omega$.

Familias equicontinuas

Definición

Una familia $\mathscr{F} \subset C(\Omega, E)$ se dice que es equicontinua en $a \in \Omega$ cuando para cada $\varepsilon > 0$ existe $D(a,r) \subset \Omega$ tal que

$$[z \in D(a,r), f \in \mathscr{F}] \Rightarrow d(f(z), f(a)) < \varepsilon$$

Se dice que $\mathscr{F}$ es equicontinua cuando es equicontinua en cada punto $a \in \Omega$.

τ_p la topología de la convergencia puntual (la topología producto) en E^Ω, donde una base de entornos de $f \in E^\Omega$ es la formada por los conjuntos $V(f, H, \varepsilon)$ con $H \subset \Omega$ finito y $\varepsilon > 0$.

Familias equicontinuas

Definición

Una familia $\mathscr{F} \subset C(\Omega, E)$ se dice que es equicontinua en $a \in \Omega$ cuando para cada $\varepsilon > 0$ existe $D(a,r) \subset \Omega$ tal que

$$[z \in D(a,r), f \in \mathscr{F}] \Rightarrow d(f(z), f(a)) < \varepsilon$$

Se dice que $\mathscr{F}$ es equicontinua cuando es equicontinua en cada punto $a \in \Omega$.

τ_p la topología de la convergencia puntual (la topología producto) en E^Ω, donde una base de entornos de $f \in E^\Omega$ es la formada por los conjuntos $V(f, H, \varepsilon)$ con $H \subset \Omega$ finito y $\varepsilon > 0$.

τ_p es más gruesa que τ_K.

Familias equicontinuas

1. Si $\mathscr{F} \subset E^{\Omega}$, denotaremos por $\overline{\mathscr{F}}^{\tau_p}$ (resp. $\overline{\mathscr{F}}^{\tau_K}$) su clausura en E^{Ω} para la topología τ_p (resp. τ_K).

Familias equicontinuas

1. Si $\mathscr{F} \subset E^{\Omega}$, denotaremos por $\overline{\mathscr{F}}^{\tau_p}$ (resp. $\overline{\mathscr{F}}^{\tau_K}$) su clausura en E^{Ω} para la topología τ_p (resp. τ_K).
2. $\overline{\mathscr{F}}^{\tau_K} \subset \overline{\mathscr{F}}^{\tau_p}$.

Familias equicontinuas

1. Si $\mathscr{F} \subset E^{\Omega}$, denotaremos por $\overline{\mathscr{F}}^{\tau_p}$ (resp. $\overline{\mathscr{F}}^{\tau_K}$) su clausura en E^{Ω} para la topología τ_p (resp. τ_K).
2. $\overline{\mathscr{F}}^{\tau_K} \subset \overline{\mathscr{F}}^{\tau_p}$.
3. Si $\mathscr{F} \subset C(\Omega, E)$ entonces $\overline{\mathscr{F}}^{\tau_K} \subset C(\Omega, E)$.

Familias equicontinuas

1. Si $\mathscr{F} \subset E^\Omega$, denotaremos por $\overline{\mathscr{F}}^{\tau_p}$ (resp. $\overline{\mathscr{F}}^{\tau_K}$) su clausura en E^Ω para la topología τ_p (resp. τ_K).
2. $\overline{\mathscr{F}}^{\tau_K} \subset \overline{\mathscr{F}}^{\tau_p}$.
3. Si $\mathscr{F} \subset C(\Omega, E)$ entonces $\overline{\mathscr{F}}^{\tau_K} \subset C(\Omega, E)$.

Lema

Si la familia $\mathscr{F} \subset C(\Omega, E)$ es equicontinua, su clausura $\overline{\mathscr{F}}^{\tau_p}$ también lo es y por lo tanto $\overline{\mathscr{F}}^{\tau_p} \subset C(\Omega, E)$.

Familias equicontinuas

1. Si $\mathscr{F} \subset E^{\Omega}$, denotaremos por $\overline{\mathscr{F}}^{\tau_p}$ (resp. $\overline{\mathscr{F}}^{\tau_K}$) su clausura en E^{Ω} para la topología τ_p (resp. τ_K).
2. $\overline{\mathscr{F}}^{\tau_K} \subset \overline{\mathscr{F}}^{\tau_p}$.
3. Si $\mathscr{F} \subset C(\Omega, E)$ entonces $\overline{\mathscr{F}}^{\tau_K} \subset C(\Omega, E)$.

Lema

Si la familia $\mathscr{F} \subset C(\Omega, E)$ es equicontinua, su clausura $\overline{\mathscr{F}}^{\tau_p}$ también lo es y por lo tanto $\overline{\mathscr{F}}^{\tau_p} \subset C(\Omega, E)$.

Proposición

Si la familia $\mathscr{F} \subset C(\Omega, E)$ es equicontinua entonces $\overline{\mathscr{F}}^{\tau_p} = \overline{\mathscr{F}}^{\tau_K}$.

Familias equicontinuas

1. Si $\mathscr{F} \subset E^{\Omega}$, denotaremos por $\overline{\mathscr{F}}^{\tau_p}$ (resp. $\overline{\mathscr{F}}^{\tau_K}$) su clausura en E^{Ω} para la topología τ_p (resp. τ_K).
2. $\overline{\mathscr{F}}^{\tau_K} \subset \overline{\mathscr{F}}^{\tau_p}$.
3. Si $\mathscr{F} \subset C(\Omega, E)$ entonces $\overline{\mathscr{F}}^{\tau_K} \subset C(\Omega, E)$.

Lema

Si la familia $\mathscr{F} \subset C(\Omega, E)$ es equicontinua, su clausura $\overline{\mathscr{F}}^{\tau_p}$ también lo es y por lo tanto $\overline{\mathscr{F}}^{\tau_p} \subset C(\Omega, E)$.

Proposición

Si la familia $\mathscr{F} \subset C(\Omega, E)$ es equicontinua entonces $\overline{\mathscr{F}}^{\tau_p} = \overline{\mathscr{F}}^{\tau_K}$.

Corolario

En una familia equicontinua $\mathscr{F} \subset C(\Omega, E)$ coinciden las topologías inducidas por τ_p y τ_K.

Teorema de Ascoli

Lema

Sea $S \subset \Omega$ un conjunto denso y $(f_n)_n \subset C(\Omega, E)$ una sucesión equicontinua puntualmente convergente sobre S. Si para cada $z \in \Omega$ existe un compacto $K_z \subset E$ que contiene a la sucesión $(f_n(z))_n$, entonces $(f_n)_n$ converge uniformemente sobre compactos hacia una cierta función $f \in C(\Omega, E)$.

Teorema de Ascoli

Lema

Sea $S \subset \Omega$ un conjunto denso y $(f_n)_n \subset C(\Omega, E)$ una sucesión equicontinua puntualmente convergente sobre S. Si para cada $z \in \Omega$ existe un compacto $K_z \subset E$ que contiene a la sucesión $(f_n(z))_n$, entonces $(f_n)_n$ converge uniformemente sobre compactos hacia una cierta función $f \in C(\Omega, E)$.

Teorema de Ascoli

Una familia $\mathscr{F} \subset C(\Omega, E)$ es τ_K-relativamente compacta si y sólo si cumple las dos condiciones siguientes

i) $\mathscr{F}$ es una familia equicontinua.

ii) Para cada $z \in \Omega$ el conjunto $\mathscr{F}(z) = \{f(z) : f \in \mathscr{F}\}$ es relativamente compacto en el espacio métrico (E, d).

Familias normales

Proposición

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto. $\mathscr{H}(\Omega)$ es cerrado en $(C(\Omega), \tau_K)$ y la derivación $D : (\mathscr{H}(\Omega), \tau_K) \to (\mathscr{H}(\Omega), \tau_K)$ dada por $D(f) := f'$ es una aplicación lineal y continua.

Familias normales

Proposición

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto. $\mathscr{H}(\Omega)$ es cerrado en $(C(\Omega), \tau_K)$ y la derivación $D : (\mathscr{H}(\Omega), \tau_K) \to (\mathscr{H}(\Omega), \tau_K)$ dada por $D(f) := f'$ es una aplicación lineal y continua.

Definición

Una familia $\mathscr{F} \subset \mathscr{H}(\Omega)$ se dice que es normal cuando de cada sucesión $(f_n)_n$ en $\mathscr{F}$ se puede extraer una subsucesión que τ_K-convergente hacia alguna $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ (i.e. $\mathscr{F}$ es un subconjunto relativamente compacto de $(\mathscr{H}(\Omega), \tau_K)$.

Familias normales

Proposición

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto. $\mathscr{H}(\Omega)$ es cerrado en $(C(\Omega), \tau_K)$ y la derivación $D : (\mathscr{H}(\Omega), \tau_K) \to (\mathscr{H}(\Omega), \tau_K)$ dada por $D(f) := f'$ es una aplicación lineal y continua.

Definición

Una familia $\mathscr{F} \subset \mathscr{H}(\Omega)$ se dice que es normal cuando de cada sucesión $(f_n)_n$ en $\mathscr{F}$ se puede extraer una subsucesión que τ_K-convergente hacia alguna $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ (i.e. $\mathscr{F}$ es un subconjunto relativamente compacto de $(\mathscr{H}(\Omega), \tau_K)$.

Si $K \subset \Omega$ es compacto y $f \in C(\Omega)$ escribimos $\| f \|_K := \sup_{z \in K} |f(z)|$.

Familias normales

Proposición

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto. $\mathscr{H}(\Omega)$ es cerrado en $(C(\Omega), \tau_K)$ y la derivación $D : (\mathscr{H}(\Omega), \tau_K) \to (\mathscr{H}(\Omega), \tau_K)$ dada por $D(f) := f'$ es una aplicación lineal y continua.

Definición

Una familia $\mathscr{F} \subset \mathscr{H}(\Omega)$ se dice que es normal cuando de cada sucesión $(f_n)_n$ en $\mathscr{F}$ se puede extraer una subsucesión que τ_K-convergente hacia alguna $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ (i.e. $\mathscr{F}$ es un subconjunto relativamente compacto de $(\mathscr{H}(\Omega), \tau_K)$.

Si $K \subset \Omega$ es compacto y $f \in C(\Omega)$ escribimos $\| f \|_K := \sup_{z \in K} |f(z)|$.

Definición

Una familia $\mathscr{F} \subset \mathscr{H}(\Omega)$ se dice que es acotada cuando para cada compacto $K \subset \Omega$ se cumple $\sup\{\| f \|_K : f \in \mathscr{F}\} < +\infty$.

Familias normales

Proposición

Para una familia $\mathscr{F} \subset \mathscr{H}(\Omega)$ son equivalentes:

a) $\mathscr{F}$ es acotada.

b) Para cada τ_K-entorno de 0, $V \subset \mathscr{H}(\Omega)$ existe $t > 0$ tal que $\mathscr{F} \subset tV$.

c) Para cada $a \in \Omega$ existe $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$ con $\sup_{f \in \mathscr{F}} \|f\|_{\overline{D(a,r)}} < +\infty$.

Familias normales

Proposición

Para una familia $\mathscr{F} \subset \mathscr{H}(\Omega)$ son equivalentes:

a) $\mathscr{F}$ es acotada.

b) Para cada τ_K-entorno de 0, $V \subset \mathscr{H}(\Omega)$ existe $t > 0$ tal que $\mathscr{F} \subset tV$.

c) Para cada $a \in \Omega$ existe $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$ con $\sup_{f \in \mathscr{F}} \|f\|_{\overline{D(a,r)}} < +\infty$.

Teorema de Montel

Una familia $\mathscr{F} \subset \mathscr{H}(\Omega)$ es normal si y sólo si es acotada. Así, $\mathscr{F} \subset \mathscr{H}(\Omega)$ es τ_K-compacta si y sólo si es τ_K-cerrada y acotada.

Familias normales

Proposición

Para una familia $\mathscr{F} \subset \mathscr{H}(\Omega)$ son equivalentes:

a) $\mathscr{F}$ es acotada.

b) Para cada τ_K-entorno de 0, $V \subset \mathscr{H}(\Omega)$ existe $t > 0$ tal que $\mathscr{F} \subset tV$.

c) Para cada $a \in \Omega$ existe $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$ con $\sup_{f \in \mathscr{F}} \|f\|_{\overline{D(a,r)}} < +\infty$.

Teorema de Montel

Una familia $\mathscr{F} \subset \mathscr{H}(\Omega)$ es normal si y sólo si es acotada. Así, $\mathscr{F} \subset \mathscr{H}(\Omega)$ es τ_K-compacta si y sólo si es τ_K-cerrada y acotada.

Corolario

No existe una norma en $\mathscr{H}(\Omega)$ cuya topología asociada es τ_K.

Familias normales

Observación

En un espacio métrico compacto (X, d) una sucesión $(x_n)_n$ converge si, y sólo si, $(x_n)_n$ tiene un único punto de aglomeración.

Familias normales

Observación

En un espacio métrico compacto (X, d) una sucesión $(x_n)_n$ converge si, y sólo si, $(x_n)_n$ tiene un único punto de aglomeración.

Teorema de Vitali

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $(f_n)_n$ una sucesión acotada en $\mathscr{H}(\Omega)$ que converge puntualmente en un conjunto $M \subset \Omega$ con $M' \cap \Omega \neq \emptyset$. Entonces $(f_n)_n$ converge uniformemente sobre compactos. Su límite $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ queda determinado por la condición $\lim_n f_n(z) = f(z)$ para todo $z \in M$.

Familias normales

Observación

En un espacio métrico compacto (X,d) una sucesión $(x_n)_n$ converge si, y sólo si, $(x_n)_n$ tiene un único punto de aglomeración.

Teorema de Vitali

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $(f_n)_n$ una sucesión acotada en $\mathscr{H}(\Omega)$ que converge puntualmente en un conjunto $M \subset \Omega$ con $M' \cap \Omega \neq \emptyset$. Entonces $(f_n)_n$ converge uniformemente sobre compactos. Su límite $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ queda determinado por la condición $\lim_n f_n(z) = f(z)$ para todo $z \in M$.

e^z como un límite

La sucesión $f_n(z) = (1 + z/n)^n$ converge uniformemente sobre compactos de $\mathbb{C}$ hacia e^z.

Familias normales

Teorema de Hurwitz

Sea (f_n) una sucesión en $\mathscr{H}(\Omega)$ que converge uniformemente sobre compactos hacia $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y sea $\overline{D(a,r)}$ un disco cerrado tal que $f(z) \neq 0$ cuando $|z-a| = r$. Entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq m$ las funciones f y f_n tienen el mismo número de ceros en $D(a,r)$ (contados repetidos según sus multiplicidades).

Familias normales

Teorema de Hurwitz

Sea (f_n) una sucesión en $\mathscr{H}(\Omega)$ que converge uniformemente sobre compactos hacia $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y sea $\overline{D(a,r)}$ un disco cerrado tal que $f(z) \neq 0$ cuando $|z-a| = r$. Entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq m$ las funciones f y f_n tienen el mismo número de ceros en $D(a,r)$ (contados repetidos según sus multiplicidades).

Corolario

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y (f_n) una sucesión en $\mathscr{H}(\Omega)$ que converge uniformemente sobre compactos hacia $f \in \mathscr{H}(\Omega)$. Si cada f_n no se anula en Ω entonces, o bien f es idénticamente nula, o bien f no se anula en Ω.

Familias normales

Teorema de Hurwitz

Sea (f_n) una sucesión en $\mathscr{H}(\Omega)$ que converge uniformemente sobre compactos hacia $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y sea $\overline{D(a,r)}$ un disco cerrado tal que $f(z) \neq 0$ cuando $|z-a| = r$. Entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq m$ las funciones f y f_n tienen el mismo número de ceros en $D(a,r)$ (contados repetidos según sus multiplicidades).

Corolario

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y (f_n) una sucesión en $\mathscr{H}(\Omega)$ que converge uniformemente sobre compactos hacia $f \in \mathscr{H}(\Omega)$. Si cada f_n no se anula en Ω entonces, o bien f es idénticamente nula, o bien f no se anula en Ω.

Corolario

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y (f_n) una sucesión de funciones inyectivas de $\mathscr{H}(\Omega)$ que converge uniformemente sobre compactos hacia $f \in \mathscr{H}(\Omega)$. Entonces, o bien f es inyectiva, o bien f es constante.

Familias normales

Proposición

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo. Si $\mathscr{F} \subset \mathscr{H}(\Omega)$ verifica

i) Existe $a \in \Omega$ tal que $\{f(a) : f \in \mathscr{F}\}$ es acotado.

ii) $\overline{\cup\{f(\Omega) : f \in \mathscr{F}\}} \neq \mathbb{C}$

entonces $\mathscr{F}$ es una familia normal.

Familias normales

Proposición

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo. Si $\mathscr{F} \subset \mathscr{H}(\Omega)$ verifica

i) Existe $a \in \Omega$ tal que $\{f(a) : f \in \mathscr{F}\}$ es acotado.

ii) $\overline{\cup\{f(\Omega) : f \in \mathscr{F}\}} \neq \mathbb{C}$

entonces $\mathscr{F}$ es una familia normal.

Montel-Caratheodory

El resultado de la proposición anterior se sigue verificando cuando la condición ii) se sustituye por la condición más débil:

ii') Existen $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$ tales que cada $f \in \mathscr{F}$ omite los valores a y b.

13/Diciembre/2006: Teorema de Riemann

Objetivos

- Demostrar que si $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ es abierto simplemente conexo, entonces Ω es conformemente equivalente a $D(0,1)$.

13/Diciembre/2006: Teorema de Riemann

Objetivos

- Demostrar que si $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ es abierto simplemente conexo, entonces Ω es conformemente equivalente a $D(0,1)$.
- Notar que $\Omega \neq \mathbb{C}$ es necesario en la equivalencia anterior.

13/Diciembre/2006: Teorema de Riemann

Objetivos

- Demostrar que si $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ es abierto simplemente conexo, entonces Ω es conformemente equivalente a $D(0,1)$.
- Notar que $\Omega \neq \mathbb{C}$ es necesario en la equivalencia anterior.
- Caracterizar los abiertos simplemente conexos en $\mathbb{C}$.

13/Diciembre/2006: Teorema de Riemann

Objetivos

- Demostrar que si $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ es abierto simplemente conexo, entonces Ω es conformemente equivalente a $D(0,1)$.
- Notar que $\Omega \neq \mathbb{C}$ es necesario en la equivalencia anterior.
- Caracterizar los abiertos simplemente conexos en $\mathbb{C}$.

Lema

i) Sea $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ tal que $f(\Omega) \subset D(0,1)$ y $a \in \Omega$. La condición

$$0 < |f'(a)| = \max\{|g'(a)| : g \in \mathscr{H}(\Omega),\ g(\Omega) \subset D(0,1)\}$$

implica que $f(a) = 0$.

ii) Si $f : \Omega \to D(0,1)$ es un isomorfismo conforme y $a = f^{-1}(0)$ se verifica

$$\begin{aligned} |f'(a)| &= \max\{|g'(a)| : g \in \mathscr{H}(\Omega),\ g(\Omega) \subset D(0,1),\ g(a) = 0\} \\ &= \max\{|g'(a)| : g \in \mathscr{H}(\Omega),\ g(\Omega) \subset D(0,1)\} \\ &= \max\{|g'(a)| : g \in \mathscr{H}(\Omega),\ g(\Omega) \subset D(0,1),\ g \text{ inyectiva }\} \end{aligned}$$

Teorema de Riemann

Versión preliminar del teorema de Riemann

Todo abierto conexo $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ con la propiedad de que para cada $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ con $0 \notin f(\Omega)$ existe $g \in \mathscr{H}(\Omega)$ con $g^2 = f$, es conformemente equivalente al disco $D(0,1)$.

Teorema de Riemann

Versión preliminar del teorema de Riemann

Todo abierto conexo $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ con la propiedad de que para cada $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ con $0 \notin f(\Omega)$ existe $g \in \mathscr{H}(\Omega)$ con $g^2 = f$, es conformemente equivalente al disco $D(0,1)$.

Teorema de Riemann

Sea $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ abierto conexo con la propiedad de que para cada $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ con $0 \notin f(\Omega)$ existe $g \in \mathscr{H}(\Omega)$ con $g^2 = f$. Entonces para cada $a \in \Omega$ existe un único isomorfismo conforme $h : \Omega \to D(0,1)$ que cumple $h(a) = 0$ y $h'(a) > 0$.

Recordatorio sobre abiertos simplemente conexos

Definición. Homotopía

Sean $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to \Omega$ dos caminos en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$.

1. Si γ_0, γ_1 son cerrados, se dice que son Ω-homotópicos si existe una función continua $h : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ que verifica:

Recordatorio sobre abiertos simplemente conexos

Definición. Homotopía

Sean $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to \Omega$ dos caminos en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$.

1. Si γ_0, γ_1 son cerrados, se dice que son Ω-homotópicos si existe una función continua $h : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ que verifica:

   i) $h(0,t) = \gamma_0(t)$, $h(1,t) = \gamma_1(t)$, para todo $t \in [0,1]$.

Recordatorio sobre abiertos simplemente conexos

Definición. Homotopía

Sean $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to \Omega$ dos caminos en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$.

1. Si γ_0, γ_1 son cerrados, se dice que son Ω-homotópicos si existe una función continua $h : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ que verifica:

   i) $h(0,t) = \gamma_0(t)$, $h(1,t) = \gamma_1(t)$, para todo $t \in [0,1]$.

   ii) $h(s,0) = h(s,1)$ para todo $s \in [0,1]$.

Recordatorio sobre abiertos simplemente conexos

Definición. Homotopía

Sean $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to \Omega$ dos caminos en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$.

1. Si γ_0, γ_1 son cerrados, se dice que son Ω-homotópicos si existe una función continua $h : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ que verifica:
   i) $h(0,t) = \gamma_0(t)$, $h(1,t) = \gamma_1(t)$, para todo $t \in [0,1]$.
   ii) $h(s,0) = h(s,1)$ para todo $s \in [0,1]$.
2. Si γ_0, γ_1 tienen los mismos extremos: $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = z_0$, $\gamma_0(1) = \gamma_1(1) = z_1$, se dice que son Ω-homotópicos (como caminos con extremos fijos) si existe una función continua $h : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ que cumple:

Recordatorio sobre abiertos simplemente conexos

Definición. Homotopía

Sean $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to \Omega$ dos caminos en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$.

1. Si γ_0, γ_1 son cerrados, se dice que son Ω-homotópicos si existe una función continua $h : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ que verifica:
   i) $h(0,t) = \gamma_0(t)$, $h(1,t) = \gamma_1(t)$, para todo $t \in [0,1]$.
   ii) $h(s,0) = h(s,1)$ para todo $s \in [0,1]$.
2. Si γ_0, γ_1 tienen los mismos extremos: $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = z_0$, $\gamma_0(1) = \gamma_1(1) = z_1$, se dice que son Ω-homotópicos (como caminos con extremos fijos) si existe una función continua $h : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ que cumple:
   i) $h(0,t) = \gamma_0(t)$, $h(1,t) = \gamma_1(t)$, para todo $t \in [0,1]$.

Recordatorio sobre abiertos simplemente conexos

Definición. Homotopía

Sean $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to \Omega$ dos caminos en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$.

1. Si γ_0, γ_1 son cerrados, se dice que son Ω-homotópicos si existe una función continua $h : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ que verifica:
   - i) $h(0,t) = \gamma_0(t)$, $h(1,t) = \gamma_1(t)$, para todo $t \in [0,1]$.
   - ii) $h(s,0) = h(s,1)$ para todo $s \in [0,1]$.
2. Si γ_0, γ_1 tienen los mismos extremos: $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = z_0$, $\gamma_0(1) = \gamma_1(1) = z_1$, se dice que son Ω-homotópicos (como caminos con extremos fijos) si existe una función continua $h : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ que cumple:
   - i) $h(0,t) = \gamma_0(t)$, $h(1,t) = \gamma_1(t)$, para todo $t \in [0,1]$.
   - ii) $h(s,0) = z_0$, $h(s,1) = z_1$ para todo $s \in [0,1]$.

Recordatorio sobre abiertos simplemente conexos

Definición. Homotopía

Sean $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to \Omega$ dos caminos en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$.

1. Si γ_0, γ_1 son cerrados, se dice que son Ω-homotópicos si existe una función continua $h : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ que verifica:
   - i) $h(0,t) = \gamma_0(t)$, $h(1,t) = \gamma_1(t)$, para todo $t \in [0,1]$.
   - ii) $h(s,0) = h(s,1)$ para todo $s \in [0,1]$.
2. Si γ_0, γ_1 tienen los mismos extremos: $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = z_0$, $\gamma_0(1) = \gamma_1(1) = z_1$, se dice que son Ω-homotópicos (como caminos con extremos fijos) si existe una función continua $h : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ que cumple:
   - i) $h(0,t) = \gamma_0(t)$, $h(1,t) = \gamma_1(t)$, para todo $t \in [0,1]$.
   - ii) $h(s,0) = z_0$, $h(s,1) = z_1$ para todo $s \in [0,1]$.

En ambos casos se dice que h es una homotopía entre γ_0 y γ_1.

Recordatorio sobre abiertos simplemente conexos

Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un abierto, denotamos por

$$\Lambda(\Omega) := \{\gamma : [0,1] \to \Omega : \gamma \text{ camino cerrado}\}.$$

$\Lambda(\Omega)$ lo consideramos dotado de la norma del supremo

$$\|\gamma\|_\infty := \sup_{t\in[0,1]} |\gamma(t)|.$$

Recordatorio sobre abiertos simplemente conexos

Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un abierto, denotamos por

$$\Lambda(\Omega) := \{\gamma : [0,1] \to \Omega : \gamma \text{ camino cerrado}\}.$$

$\Lambda(\Omega)$ lo consideramos dotado de la norma del supremo

$$\|\gamma\|_\infty := \sup_{t\in[0,1]} |\gamma(t)|.$$

Ejercicio

Sean $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to \Omega$ dos caminos cerrados en Ω. Pruébese que son equivalentes:

1. γ_0, γ_1 son homotópicos como caminos cerrados en Ω.
2. Existe $\gamma : [0,1] \to (\Lambda(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ continua tal que $\gamma(0) = \gamma_0$ y $\gamma(1) = \gamma_1$.

Relación entre homotopía y homología

Lema

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y fijemos $a \notin \Omega$. La aplicación $\mathrm{Ind}(.,\mathrm{a}) : (\Lambda(\Omega), \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{Z}$, que a cada $\gamma \in \Lambda(\Omega)$ le hace corresponder su índice alrededor de a es localmente constante.

Relación entre homotopía y homología

Lema

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y fijemos $a \notin \Omega$. La aplicación $\mathrm{Ind}(.,a) : (\Lambda(\Omega), \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{Z}$, que a cada $\gamma \in \Lambda(\Omega)$ le hace corresponder su índice alrededor de a es localmente constante.

Proposición

Si $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to \Omega$ son dos caminos cerrados Ω-homotópicos, entonces son Ω-homólogos.

Relación entre homotopía y homología

Lema

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y fijemos $a \notin \Omega$. La aplicación $\mathrm{Ind}(.,a) : (\Lambda(\Omega), \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{Z}$, que a cada $\gamma \in \Lambda(\Omega)$ le hace corresponder su índice alrededor de a es localmente constante.

Proposición

Si $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to \Omega$ son dos caminos cerrados Ω-homotópicos, entonces son Ω-homólogos.

Definición

Un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ se dice que es simplemente conexo si cada camino cerrado en Ω es Ω-homotópico a un camino constante.

Versión homotópica de los teoremas de Cauchy

Teorema de Cauchy

Sea $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y γ un camino cerrado en Ω, regular a trozos y Ω-homotópico a un camino constante. Se verifica

$$\int_\gamma f(z)dz = 0; \quad \operatorname{Ind}(\gamma, a)f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}dz \text{ si } a \notin \operatorname{Imagen}(\gamma)$$

Si γ_0, γ_1 son caminos regulares a trozos en Ω, con los mismos extremos, y Ω-homotópicos como caminos con extremos fijos, se cumple

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

Teorema de Riemann

Caracterización de abiertos simplemente conexos

Las siguientes condiciones son equivalentes para un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$:

1. Ω es homeomorfo a $D(0,1)$.

Teorema de Riemann

Caracterización de abiertos simplemente conexos

Las siguientes condiciones son equivalentes para un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$:

1. Ω es homeomorfo a $D(0,1)$.
2. Ω es simplemente conexo.

Teorema de Riemann

Caracterización de abiertos simplemente conexos

Las siguientes condiciones son equivalentes para un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$:

1. Ω es homeomorfo a $D(0,1)$.
2. Ω es simplemente conexo.
3. Cada camino cerrado en Ω es Ω-homólogo a cero.

Teorema de Riemann

Caracterización de abiertos simplemente conexos

Las siguientes condiciones son equivalentes para un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$:

1. Ω es homeomorfo a $D(0,1)$.
2. Ω es simplemente conexo.
3. Cada camino cerrado en Ω es Ω-homólogo a cero.
4. $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ es conexo.

Teorema de Riemann

Caracterización de abiertos simplemente conexos

Las siguientes condiciones son equivalentes para un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$:

1. Ω es homeomorfo a $D(0,1)$.
2. Ω es simplemente conexo.
3. Cada camino cerrado en Ω es Ω-homólogo a cero.
4. $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ es conexo.
5. $f(z)\mathrm{Ind}(\Gamma, z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw$, para cada $f \in \mathscr{H}(\Omega)$, para cada $z \in \Omega$ y para cada ciclo Γ en Ω.

Teorema de Riemann

Caracterización de abiertos simplemente conexos

Las siguientes condiciones son equivalentes para un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$:

1. Ω es homeomorfo a $D(0,1)$.
2. Ω es simplemente conexo.
3. Cada camino cerrado en Ω es Ω-homólogo a cero.
4. $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ es conexo.
5. $f(z)\mathrm{Ind}(\Gamma,z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw$, para cada $f \in \mathscr{H}(\Omega)$, para cada $z \in \Omega$ y para cada ciclo Γ en Ω.
6. $\displaystyle\int_\Gamma f(w)dw = 0$ para cada $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y para cada ciclo Γ en Ω.

Teorema de Riemann

Caracterización de abiertos simplemente conexos

Las siguientes condiciones son equivalentes para un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$:

1. Ω es homeomorfo a $D(0,1)$.
2. Ω es simplemente conexo.
3. Cada camino cerrado en Ω es Ω-homólogo a cero.
4. $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ es conexo.
5. $f(z)\mathrm{Ind}(\Gamma,z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw$, para cada $f \in \mathscr{H}(\Omega)$, para cada $z \in \Omega$ y para cada ciclo Γ en Ω.
6. $\displaystyle\int_\Gamma f(w)\,dw = 0$ para cada $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y para cada ciclo Γ en Ω.
7. Ω es holomórficamente conexo.

Teorema de Riemann

Caracterización de abiertos simplemente conexos

Las siguientes condiciones son equivalentes para un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$:

1. Ω es homeomorfo a $D(0,1)$.
2. Ω es simplemente conexo.
3. Cada camino cerrado en Ω es Ω-homólogo a cero.
4. $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ es conexo.
5. $f(z)\operatorname{Ind}(\Gamma,z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}dw$, para cada $f \in \mathscr{H}(\Omega)$, para cada $z \in \Omega$ y para cada ciclo Γ en Ω.
6. $\displaystyle\int_\Gamma f(w)dw = 0$ para cada $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y para cada ciclo Γ en Ω.
7. Ω es holomórficamente conexo.
8. Ω es logarítmicamente conexo.

Teorema de Riemann

Caracterización de abiertos simplemente conexos

Las siguientes condiciones son equivalentes para un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$:

1. Ω es homeomorfo a $D(0,1)$.
2. Ω es simplemente conexo.
3. Cada camino cerrado en Ω es Ω-homólogo a cero.
4. $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ es conexo.
5. $f(z)\mathrm{Ind}(\Gamma,z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}dw$, para cada $f \in \mathscr{H}(\Omega)$, para cada $z \in \Omega$ y para cada ciclo Γ en Ω.
6. $\displaystyle\int_\Gamma f(w)dw = 0$ para cada $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ y para cada ciclo Γ en Ω.
7. Ω es holomórficamente conexo.
8. Ω es logarítmicamente conexo.
9. Para cada $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ con $0 \notin f(\Omega)$ existe $g \in \mathscr{H}(\Omega)$ con $g^2 = f$.

Integrales dependientes de un parámetro

Proposición

Sea $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ un camino regular a trozos, $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $T := \gamma([0,1])$. Sea $F : T \times \Omega \to \mathbb{C}$ una función que cumple:

1. Para cada $w \in T$ la función $z \rightsquigarrow F(w,z)$ es holomorfa en Ω;
2. Para cada $z \in \Omega$ las funciones $w \mapsto F(w,z)$ y $w \mapsto \frac{d}{dz}F(w,z)$ son continuas;
3. Para cada compacto $K \subset \Omega$

$$\sup\{|F(w,z)| : w \in T, z \in K\} = M_K < +\infty.$$

Entonces la función

$$f(z) := \int_\gamma F(w,z)dw$$

es holomorfa en Ω y

$$f'(z) := \int_\gamma \frac{d}{dz} F(w,z)dw \quad \text{para cada } z \in \Omega.$$

Integrales dependientes de un parámetro

Proposición

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $F : [0,+\infty) \times \Omega \to \mathbb{C}$ una función que cumple:

1. F es continua;
2. Para cada $t \in [0,+\infty)$ la función $z \rightsquigarrow F(t,z)$ es holomorfa y se supone que existe $\varphi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ tal que
   (a) $|F(t,z)| \leq \varphi(t)$ para cada $t \in [0,+\infty)$ y $z \in \Omega$;
   (b) $\int_0^{+\infty} \varphi(t)dt < +\infty$

Entonces la función $f(z) := \int_0^{+\infty} F(t,z)dt$ es holomorfa en Ω y

$$f'(z) := \int_0^{+\infty} \frac{d}{dz} F(t,z)dt \quad \text{para cada } z \in \Omega.$$

Observación

En la proposición anterior se pueden sustituir (a) y (b) por la condición de que para cada compacto $K \subset \Omega$ exista $\varphi_K : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ tal que $|F(t,z)| \leq \varphi_K(t)$ para cada $t \in [0,+\infty)$ y $z \in K$ y $\int_0^{+\infty} \varphi_K(t)dt < +\infty$

Fórmula integral para la función Γ

Proposición

La expresión $f(z) := \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$ define una función holomorfa en el abierto $\Omega := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z > 0\}$. f coincide con la función Γ en $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$ y por tanto $f = \Gamma$ en Ω.